Индуктивные типы данных в программировании

А. М. Пеленицын

Факультет математики, механики и компьютерных наук ЮФУ

Теория категорий. Междисциплинарный язык математики

19 апреля 2009 г.

Предварительные сведения

- Рассматриваем дистрибутивные категории с конечными произведениями $(\times, 1)$ и суммами $(+, 0)$
- Имеет место биекция:

$$\mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C) \leftrightarrows \mathrm{Hom}(A + B, C)$$

  - $\mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(A + B, C)$ по определению $A + B$
  - $\mathrm{Hom}(A + B, C) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(A, C) \times \mathrm{Hom}(B, C)$:

$$h \mapsto (h \circ i_l, h \circ i_r)$$

F-алгебры

- $\mathrm{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ — функтор в категории $\mathcal{C}$ (*эндофунктор*).
- F-*алгебра* это пара (A, φ), где $\varphi : \mathrm{F}A \to A$ — морфизм в $\mathcal{C}$.
  A — *носитель* F-алгебры.
  Или: F-алгебра это морфизм φ в $\mathcal{C}$, т.ч. $\operatorname{dom}\varphi = \mathrm{F}\operatorname{cod}\varphi$
- Гомоморфизм из F-алгебры (C, φ) в F-алгебру (D, ψ) это морфизм $f : C \to D$, такой что

  $$f \circ \varphi = \psi \circ \mathrm{F}f$$

  или коммутативна диаграмма:

  $$\begin{tikzcd} \mathrm{F}C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathrm{F}f"'] & C \arrow[d, "f"] \\ \mathrm{F}D \arrow[r, "\psi"] & D \end{tikzcd}$$

Категория F-алгебр $\mathcal{A}lg(\mathrm{F})$

- Объекты: F-алгебры.
- Мофизмы: тройки (f, φ, ψ), где f — гомоморфизм F-алгебр φ, ψ.
- Единичные морфизмы: $\mathrm{id}_\varphi = (\mathrm{id}_{\mathrm{cod}\,\varphi}, \varphi, \varphi)$.
- Закон композиции: $(g, \varphi_2, \varphi_3) \circ (f, \varphi_1, \varphi_2) = (g \circ f, \varphi_1, \varphi_3)$.

Инициальная алгебра

Инициальная алгебра $(\mu\mathsf{F}, \mathsf{in})$ это инициальный объект в $\mathcal{A}lg(\mathsf{F})$.

$$\forall (C, \varphi)\ \exists! (\!|\varphi|\!) :\ (\!|\varphi|\!) \circ \mathsf{in} = \mathsf{F}(\!|\varphi|\!) \circ \varphi$$

Иначе, для каждой (C, φ) существует единственная стрелка $(\!|\varphi|\!)$, делающая коммутативной диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{F}\mu\mathsf{F} \arrow[r, "\mathsf{in}"] \arrow[d, "\mathsf{F}(\!|\varphi|\!)"'] & \mu\mathsf{F} \arrow[d, "(\!|\varphi|\!)"] \\
\mathsf{F}C \arrow[r, "\varphi"] & C
\end{tikzcd}$$

Стрелки типа $(\!|\varphi|\!)$ — *катаморфизмы* (от греч. $\kappa\alpha\tau\alpha$ — «нисходящий»).

Свойства инициальных алгебр

- существуют для *полиномиальных* F;
- рефлексивность: $(\!|\,\mathsf{in}\,|\!) = \mathsf{id}$;
- слияние (fusion): для гомоморфизма f F-алгебр φ, ψ:

$$f \circ (\!|\varphi|\!) = (\!|\psi|\!).$$

Теорема

Инициальная алгебра $\mathsf{in_F}$ *— изоморфизм. Обратный морфизм:*

$$\mathsf{in_F}^{-1} = (\!|\, \mathsf{F\,in_F} \,|\!)$$

Справа: $\mathsf{in_F} \circ (\!|\, \mathsf{F\,in_F} \,|\!) \overset{\mathit{fusion}}{=} (\!|\, \mathsf{in_F} \,|\!) \overset{\mathit{reflection}}{=} \mathsf{id}$.
Слева:
$(\!|\, \mathsf{F\,in_F} \,|\!) \circ \mathsf{in_F} \overset{\mathit{def}}{=} \mathsf{F\,in_F} \circ \mathsf{F}(\!|\, \mathsf{F\,in_F} \,|\!) \overset{\mathit{funct}}{=} \mathsf{F}(\mathsf{in_F} \circ (\!|\, \mathsf{F\,in_F} \,|\!)) \overset{\text{справа}}{=} \mathsf{F\,id} \overset{\mathit{funct}}{=} \mathsf{id}$.

Множество натуральных чисел в $\mathcal{S}et$

- рассмотрим $zero : 1 \to \mathbb{N}$, $succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:
  $zero = 0$
  $succ(n) = n + 1$
- $[zero, succ] : 1 + \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- утверждение: $[zero, succ]$ — инициальная алгебра для $\mathrm{N}(X) = 1 + X$

$$
\begin{array}{ccc}
1 + \mathbb{N} & \xrightarrow{[zero, succ]} & \mathbb{N} \\
{\scriptstyle \mathrm{N}f = \mathrm{id}_1 + f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\
1 + X & \xrightarrow{[c, h]} & X
\end{array}
$$

Найти решение:
$f \circ zero = c$
$f \circ succ = h \circ f$

Множество натуральных чисел в $\mathcal{S}et$

- Решение: $f(n) = h^n \circ c$
- Проверим рефлексивность инициальных алгебр:

$$\llparenthesis [zero, succ] \rrparenthesis (n) = succ^n \circ zero = n$$

Имеют место соотношения:

- $add(m, n) = add_m(n) = \llparenthesis [\lambda x.m, succ] \rrparenthesis (n)$

$$\begin{tikzcd}
1 + \mathbb{N} \arrow[r, "{[zero, succ]}"] \arrow[d, "\mathsf{N}\llparenthesis \varphi_m \rrparenthesis"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\llparenthesis \varphi_m \rrparenthesis"] \\
1 + \mathbb{N} \arrow[r, "{\varphi_m = [\lambda x.m, succ]}"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

- $mult(m, n) = mult_m(n) = \llparenthesis [zero, \lambda x.add(m, x)] \rrparenthesis (n)$

Тип данных «Список»

- категория: «Типы данных», $\mathcal{T}ypes$ ($\sim \mathcal{S}et$)
- эндофунктор: $L_A(X) = 1 + A \times X$
- объект $List(A)$,
  морфизмы: $empty : 1 \to List(A)$, $cons : A \times List(A) \to List(A)$
- утверждение: L_A-алгебра $[empty, cons]$ — инициальная

$$
\begin{array}{ccc}
1 + A \times List(A) & \xrightarrow{in=[empty,cons]} & List(A) \\
\mathrm{L}_A f = (\mathrm{id}_1 + \mathrm{id}_A \times f) \Big\downarrow & & \Big\downarrow f = (\![[c,h]]\!) \\
1 + A \times X & \xrightarrow{[c,h]} & X
\end{array}
$$

- Найти решение:

$$
\begin{aligned}
f \circ empty &= c \\
f \circ cons &= h \circ (\mathrm{id}_A \times f)
\end{aligned}
$$

Обработка списков

- Решение: `foldr` в функциональном программировании или `std::accumulate` в C++

  Имеют место соотношения:
- $length = (\![zero, \lambda a, n.succ(n)]\!)$
- $concat(xs, ys) = concat_{ys}(xs) = (\![\lambda x.ys, cons]\!)(xs)$
- $map(f) = (\![empty, cons \circ (f \times id_{List(B)})]\!)$, где $f : A \to B$

Литература

- Vene. Categorical Programming with Inductive and Coinductive Types (2000).
- Functional Programming with Bananas, Lenses, Envelopes and Barbed Wire (1991).
- Thompson. Haskell: The Craft of Functional Programming (1999).